1013. 標數pノ準單純リイ環

松島 與三（阪大學生）

任意ノ体kノ上ノ準單純リイ環Lヲ考ヘマス。

kノ標數0ノトキハ，Lハ可換ナラザル單純環ノ直和ニナリ、シカモソノ derivation ハスベテ inner ニナルコトハ，ヨク知ラレテヰリマスガ 標數$p \neq 0$ノ場合ニハ、一般ニ單純環ノ直和ニナラズ、又 derivation ハ inner デアルトハ限ラナイノデ，單純環ノコトガワカッタトシテモ、準單純環ノ構造ハ一般ニハ分ラナイシ、derivation algebra ノ構造モ複雑ニナッテ來マスガ、Lノ ideal ガ準單純デアルヤウナ場合ハ、割合簡單ニナリマスノデ、ソノヤウナ場合ニツイテ、準單純環ガ單純環カラ、ドノヤウニシテ得ラレルカヲ少シシラベテ見ルコトニシマス。

§1. 体kノ上ノ Lie 環Lヲ考ヘル。ソノ積ヲ$a \circ b$ $(a, b \in L)$デ表スコトニシマス。

$$\sigma(\alpha x + \beta y) = \alpha \sigma x + \beta \sigma y$$

$$\sigma(x \circ y) = (\sigma x) \circ y + x \circ (\sigma y)$$

$$x, y \in L,\ \alpha, \beta \in k$$

ヲ満スLノlinear transformationヲderivationトヨブ。

$a \in L$トスレバ、Jacobiノ恒等式ヨリ

$$a \circ (x \circ y) = (a \circ x) \circ y + x \circ (a \circ y)$$

トナルカラ，$x \to a \circ x$ナルlinear transformationハderivationトナル。コレヲLノinner derivationトヨビ、Zassenhausニナラッテ、$\underline{a}$デ表スコトニスル。

ニツノderivation σ, τガアッタトキ，$\sigma \circ \tau = \sigma\tau - \tau\sigma$ト定義スレバ，コレニヨッテderivationノ全体D(L)ハkノ上ノLie環ヲツクリ、inner derivationノ全体I(L)ハソノidealニナル。[1]

初メニ準単純環ノderivation algebraノコトヲシラベテ見マス。

（定理1） Lヲ準単純ナLie環トスレバ，ソノderivation algebra D(L)ノsubalgebra R

---

1) 吉田先生：A characterisation of the adjoint representation of the semi-simple Lie rings (Jap. Journ. 1938)
Zassenhaus: Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik (Abh. Hamburg Bd. 13. 1939)

デ、$I(L)$ヲフクムモノハ、スベテ準単純デアル。特ニ$D(L)$ハ準単純デアル。

(証) Rヲ$D(L)$ノ *subalgebra*, $R \supseteq I(L)$トスル。Rノ *solvable ideal* Aヲトル。$A \cap I(L)$ハ$I(L)$ノ *solvable ideal* デアリ, $L \cong I(L)$デアルカラ、$A \cap I(L) = 0$. $A \circ I(L) \subseteq A \cap I(L)$ナル故 $A \circ I(L) = 0$.

従ッテ$\sigma \in A$トスレバ、任意ノ$\underline{x} \in I(L)$ニ対シテ$\sigma \circ \underline{x} = 0$, シカルニ$\sigma \circ \underline{x} = \underline{\sigma x}$デアルカラ[2]、スベテノ$x \in L$ニ対シ、$\underline{\sigma x} = 0$トナルカラ、$\sigma x = 0$. $\sigma = 0$ コレハ$A = 0$ナルコトヲ示ス。従ッテRハ準単純デアル。

q. e. d.

(定義) スベテノ *derivation* σニ対シ、*invariant* ナLノ *submodule* ヲLノ *characteristic ideal* トヨブ。

Lie 環Lガ$L \circ L = L$ヲ満足スルトキ *vollkommen* トイフ。

(定理2) Lガ *vollkommen* デ、且ツソノ *centrum* $= 0$トスレバ、ソノ *derivation algebra* $D(L)$ニ於テハ、$I(L)$ヲフクム *subalgebra* ノ *derivation* ハ$D(L)$ノ *inner derivation* ニ拡張出来ル。特ニ$D(L)$ノ *derivation* ハスベテ

---

2) cf. 1)

inner デアル。

（證）

$R \supseteq I(L)$ ヲ $D(L)$ ノ subalgebra トスル。R ノ任意ノ derivation E ヲトル。L ノ centrum $= 0$ ナル故、$L \cong I(L)$ デ、$I(L)$ ハ R ノ vollkommen ナ Ideal ニナルカラ characteristic デアル。[4]
故ニ E ハ $I(L)$ ノ de　　n $\bar{\varepsilon}$ ヲ induce スル。
$L \cong I(L)$ ナルコトヨリ、任意ノ $x \in L$ ニ對シ

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, dash] & I(L) \\
x \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \underline{x} \arrow[d, "\bar{\varepsilon}"] \\
\varepsilon x \arrow[r, leftrightarrow] & \bar{\varepsilon} x
\end{tikzcd}$$

$\underline{\varepsilon x} = \bar{\varepsilon} \underline{x}$ トナル様ナ εx ガ一意的ニ存在スル。
ソウスレバ、$x \longrightarrow \varepsilon x$ ナル對應ハ L ノ derivation ニナル。スナハチ
$\varepsilon \in D(L)$

ε ガ $D(L)$ ニ於テ induce スル inner derivation ヲ $\underline{\varepsilon}$ トシ $E - \underline{\varepsilon} = \widetilde{E}$ トオク。

$$\begin{aligned}
(E - \underline{\varepsilon})\underline{x} &= E\underline{x} - \underline{\varepsilon}\underline{x} = \bar{\varepsilon}\underline{x} - \varepsilon \circ x \\
&= \underline{\varepsilon x} - \underline{\varepsilon x} = 0
\end{aligned}$$

故ニスベテノ $\underline{x} \in I(L)$ ニ對シ $\widetilde{E}\underline{x} = 0$
$\eta \in R$ トスル。

$$0 = \widetilde{E}(\eta \underline{x}) = \widetilde{E}(\eta \circ \underline{x}) = (\widetilde{E}\eta) \circ \underline{x} + \eta \circ (\widetilde{E}\underline{x})$$

---

3) Zassenhaus P. 52 ニハ $D(L)$ ノ derivation ガスベテ inner ニナルコトダケガ書イテアル。

4) Zassenhaus P. 52.

$$=(\widetilde{E}\eta)\circ \underline{x}=(\underline{\widetilde{E}\eta})x$$

ダカラ、スベテノxニ對シ$(\widetilde{E}\eta)x=0$ 從ツテ$\widetilde{E}\eta=0$ スナハチ KデハE＝E トナッテオル。　　q. e. d.

（定理3）　Lヲ準單純デ、單純環ノ直和ニナッテヰルトスル。ソウスレバ R⊇I(L)ナルD(L)ノ subalgebra R ハ定理ノコリ準單純デハアルガ、I(L)ハRノ maximal fullreducible[5] ideal デ、RガI(L)ヨリ、本當ニ大キイ場合ハ fullred. ニナラヌ。シカシ、Rノ ideal ハスベテ準單純デアル。

（証）

L≅I(L)ナル故、I(L)ガ fullred. ナルコトハ明カデアル。I(L)ヲ含ムRノ fullred. ideal Aガアルトスレバ、I(L)ハAノ直和因子トナル。∴ A＝B＋I(L). B∘I(L)＝0ナル故、前ト同様ニシテ、B＝0 從ッテ A＝I(L)トナル。

次ニ Rノ ideal ガスベテ準單純ナルコトヲイフ。Aヲ任意ノRノ ideal トスル。I(L)⊇Aノトキハ I(L)ガ fullred. ナルコトヨリ明カデ、又I(L)∧A＝D＝0ノトキハ、A＝0トナルカラ、D≠0, A⊄I(L)トシテ証明スル。I(L)ハ fullred ナル故、DハI(L)ノ直和因子トナル。

---

5)　以後可換ナラザル單純環ノ直和ニナル環ノコトヲ full-red トヨブコトニスル。

$I(L) = B + D$ シカルニBハ明カニ *vollkommen* ダカラ $I(L)$ ノ *ch. ideal* デ, $I(L)$ ガ *ideal* ダカラ.
R ノ *ideal* トナル。

D ノ *centralisator*[6)] ヲ $Z(D)$ トスル。$B \circ D = 0$ ダカラ $B \subseteq Z(D)$ デアルカラ

$$B \subseteq Z(D) \cap I(L)$$

シカルニ $D \cap Z(D)$ ハ R ノ可換ナ *ideal* デアルカラ、
$D \cap Z(D) = 0$

従ッテ $(I(L) \cap Z(D)) \cap D = 0$ 故ニ

$$(I(L) \cap Z(D),\ D) = (I(L) \cap Z(D)) + D$$

$$(I(L) \cap Z(D),\ D) \leq I(L) = B + D$$

$$\leq (I(L) \cap Z(D)) + D$$

ナル故

$$I(L) = (I(L) \cap Z(D)) + D \qquad B \subseteq I(L) \cap Z(D)$$

ヨリ

$$B = I(L) \cap Z(D)$$

トナル。

$$B \cap A = I(L) \cap Z(D) \cap A = (I(L) \cap A) \cap Z(D)$$

$$= D \cap Z(D) = 0$$

ナル故 $(B, A) = B + A$, $(B, A) \leq (I(L), A)$ ダガ

$$I(L) = B + D \leq B + A,\ A = B + A$$

ナル故

$$(I(L), A) = B + A \text{ トナル。}$$

---

6) $x \circ D = 0$ ナル x ノ全体ヲイフ。ソレハ又 R ノ *ideal* ニナル。

故ニ、Aノ ideal ハ (I(L), A) ノ ideal トナルガ、(I(L), A) ≠ I(L) ハ定理1ニヨリ、準單純ナル故、Aモ準單純デナケレバナラナイ。 q. e. d.

§2. 次ニ、上ニヤッタコトノ逆ヲ考ヘテ行クコトニシマス。

group ノ場合ニ、Fitting ガ同ジヤウナコトヲヤッテ居リマスガ (Fitting: Beiträge zur Theorie der Gruppen von endlichen Ordnung, Jahresbericht D. M. V. Bd. 48) Lie 環ノ場合ニハ、準單純環ノ ideal ハ準單純ニナラナイカモシレナイノデ、假定ニ入レテヤラネバナリマセン。

先ヅ、初メニ準單純ナLノ minimal ideal ガスベテ準單純デアルト假定シマス。コノ假定ナシニ次ノ Lemma ガ成立ツ。

(Lemma 1)

任意ノ準單純環 L ノ二ツノ ideal A, B ガ fullreducible ナラ、ソノ和 (A, B) モ fullred. デアル。

(証)

定理3ノ証明ノトキト同様ニシテ、$A \cap B = D$, $A = A_1 + D$ トスレバ、$(A, B) = A_1 + B$ ナルコトガ証明出来ル。

A_1 モ, B モ fullred. デアルカラ、(A, B) モ fullred. デアル。

（定理4） minimal ideal が準単純デアルヤウナ準単純環Lハ唯一ツノ0デナイ、maximal fullred. ideal Sヲモチ、ソレハ characteristic ideal デアル。

（証） Max. fullred. ideal がニツアッタトシ、コレヲA, Bトスレバ、ソノ和モ Lemma 1ニヨリ fullred. ニナルカラ、唯一ツニ限ルコトガワカル。且ツソレハ、勿論 vollkommen デアルカラ、Characteristic デアル。次ニ0デナイコトヲイフ。

Lノ min. ideal Aヲトル。（Aハ vollkommen トナルコトハスグイヘル）。

Aノ任意ノ ideal Bヲトレバ、$B \circ B = B$ トナルナラ、Bハ vollkommen デ、故ニAノ ch. ideal デ、Aガ ideal ナル故、Lノ ideal トナルカラ、

$B \supsetneqq B \circ B$、同様ニシテ $B \circ B \supsetneqq (B \circ B) \circ (B \circ B) \cdots\cdots$

シタガッテ、Bハ可解デアルカラ、Aガ準単純ナコトヨリ $B = 0$。従ッテAハ単純デアル。$A \subseteq S$ ダカラ、$S \neq 0$.

q. e. d.

$S = S_1 + \cdots\cdots + S_n$ ト単純環ノ直和ニナッタトスレバ S_i ガ可換デナイコトヨリ vollkommen デアルカラ、前ノヤウニ S_i ハLノ minimal ideal ニナルコトガワカル。逆ニ Min. ideal ハ上ニ証明シタ如ク単純デアルカラ、Sハ実ハ Min. ideal ノ sum トナリ、従ッテLノ Sockel（Loewy ノ Kompositionsreihe

ノ一番最後ノモノ）ト一致スルコトガワカル。故ニコレカラ上ノ S ヲ L ノ Sockel トヨブコトニスル。

定理4ノ條件ノ下ニ

(Lemma 2) L ノ Sockel S ノ centralisater $Z(S)$ ガ準単純デアルト假定スル。ソウスレバ $Z(S)=0$ トナルコトガイヘル。

(證)

$S \cap Z(S)$ ハ可換ナ ideal ダカラ、$S \cap Z(S)=0$.

故ニ $(S, Z(S)) = S+Z(S)$

$Z(S)$ ノ min. ideal A ヲ考ヘルト、$Z(S)$ ガ準単純トイフコトカラ、A ハ vollkommen. 從ッテ $Z(S)$ ノ ch. ideal デ、從ッテ L ノ ideal ニナル. 勿論 A ハ L ノ min. ideal ダカラ、假定ヨリ準単純トナル。

定理4ヲ $Z(S)$ ニツカヘバ、$Z(S) \neq 0$ ナラ、0 デナイ Sockel S' ガアル。$S+S'$ ハ fullred. ニナルカラ、$S+S'=S$, $S'=0$ トナラネバナラナイ。從ッテ $Z(S)=0$ トナラネバナラナイ。

(定理5) L ガ準単純トシ. L ノ min. ideal 及ビ Sockel centralisater ガ準単純トスル。ソウスレバ、L ハ fullreducible ナ Lie 環ノ derivation algebra ノ inner derivation ヲスベテフクム様ナ subalgebra ト isomorph デアル。

(證) L ノ Sockel S ハ 0 デナク、fullred. デ

アル。

$a \in L$ ニ對シ、S ノ derivation $\bar{a}: x \to a \circ x$ ($x \in S$) ヲ對應セシメルト、コレニヨリ L ハ D(S) ノ I(S) ヲフクムヌウナ subalgebra $\bar{L}$ ニ homomorph ニ abbilden サレルガ、Lemma 2 ヨリ実ハ isomorph ニナルコトガワカル。

定理3ト組合セテ

（系1） L ノ min. ideal 及ビ Sockel, centralisater ガ準単純デアレバ、L ノスベテノ ideal ハ準単純デアル。

（系2） 準単純環 L デ、ソノ ideal ガスベテ準単純デアルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ、L ガ fullred. ナ環ノ derivation algebra ノ inner ヲスベテフクム subalgebra ト isomorph トナルコトデアル。

今ト全様ニ、L ノ min. ideal 及ビ Sockel ノ centralisater ガ準単純ト假定スル。Sockel S ハ ch. ideal デアルカラ、L ノ任意ノ derivation σ ニ対シ、$\sigma S \subseteq S$ トナルカラ、定理5ノ証明ニ於ケルト同様ニ、σ ニ對シ σ ガ S ニ於テ induce スル derivation $\bar{\sigma}$ ヲ對應サセルト、D(L) ハ D(S) ノ subalgebra ニ homomorph ニウツルガ、実ハ isomorph ニナル。何者、0 ニ對應スル D(L) ノ ideal ヲ A トスレバ定理5ノ對應ガ isomorph ナルコトヨリ $A \frown I(L) = 0$ コレヨリ $A = 0$ ガ出ル。D(L) ノ Bild ヲ $\overline{D(L)}$ デ表ハス。

$\bar{\sigma} \in \overline{D(L)}$, $\bar{a} \in \bar{L} = \overline{I(L)}$ トスレバ,

$$(\bar{\sigma} \circ \bar{a})x = \bar{\sigma}(\bar{a}x) - \bar{a}(\bar{\sigma}x) = \sigma(a \circ x) - a \circ (\sigma x)$$
$$= (\sigma a) \circ x = (\overline{\sigma a})x$$

ナル故

$$\bar{\sigma} \circ \bar{a} = \overline{\sigma a} \in \bar{L}$$

スナハチ $\bar{\sigma}$ ハ $\bar{L}$ ノ normalisater[7] $N(\bar{L})$ ニ屬スル。

逆ニ、$\varepsilon \in N(\bar{L})$ トスレバ、任意ノ $\bar{a} \in \bar{L}$ ニ對シ、$\varepsilon \circ \bar{a} \in \bar{L}$ ダカラ $\bar{b} = \varepsilon \circ \bar{a}$ ナル $b \in L$ ガ一意的ニ存在スル。$b = \varepsilon' a$ トオク。

スナハチ $\overline{\varepsilon' a} = \varepsilon \circ \bar{a}$ ソウスレバ

$$\overline{\varepsilon'(a \circ b)} = \varepsilon \circ \overline{(a \circ b)} = \varepsilon \circ (\bar{a} \circ \bar{b})$$
$$= (\varepsilon \circ \bar{a}) \circ \bar{b} + \bar{a} \circ (\varepsilon \circ \bar{b})$$
$$= \overline{\varepsilon' a} \circ \bar{b} + \bar{a} \circ \overline{\varepsilon' b} = \overline{\varepsilon' a \circ b + a \circ \varepsilon' b}$$

ナル故

$$\varepsilon'(a \circ b) = (\varepsilon' a) \circ b + a \circ (\varepsilon' b)$$

スナハチ ε' ハ L ノ derivation デアリ、$x \in S$ ニ対シテハ $\bar{x} = \underline{x}$ (スナハチ $\bar{x}$ ハ S ノ inner derivation) ナルコトハ定義ヨリ明デアルカラ。

$$\overline{\varepsilon' x} = \varepsilon \circ \bar{x} = \varepsilon \circ \underline{x} = \varepsilon \underline{x} = \overline{\varepsilon x} \longrightarrow \varepsilon' x = \varepsilon x$$

スナハチ $\overline{\varepsilon'} = \varepsilon$ デアル。故ニ $\varepsilon \in \overline{D(L)}$.

スナハチ $\overline{D(L)}$ ハ $\bar{L}$ ノ normalisater ト一致スル。

從ツテ

---

7) $x \circ \bar{L} \subseteq \bar{L}$ ナル x ノ全体ヲ $\bar{L}$ ノ normalisater トヨブ。

（定理6）

準単純環 L ノ min. ideal，及ビ Sockel ノ centralisater ガ準単純デアルト假定スル。ソウスレバ，L ハ fullreducible ナ Lie 環 S ノ derivation algebra D(S) ノ $R \supseteq I(S)$ ナル subalgebra ト isomorph ニナルガ、コノトキ D(L) ハ R ノ D(S) ニ於ケル normalisater N(R) ト isomorph ニナル。

上ノ証明ノ系トシマシテ

（系） 上ノ同ジ條件ノ下デ、L ノ二ツノ derivation σ，τ ガソノ Sockel S ノスベテノ元 x ニ対シ $\sigma x = \tau x$ ナラ $\sigma \equiv \tau$ デアル。

次ニ Sockel ノ derivation ガスベテ L ノ derivation ニ拡張出来ルトスレバ、$\overline{D(L)} = D(S)$，スナハチ $\overline{L}$ ハ D(S) ノ ideal ニナリ、更ニ L ノ inner derivation ニ拡張出来ルトスレバ、上ノ系ヨリ、L ノ derivation ハスベテ inner デアルコトガワカル。

従ツテ、$\overline{L} = D(S)$ トナル。

前ニ云ツタコトト一緒ニスレバ

（定理7）

準単純環 L ガ fullreducible ナ環ノ derivation algebra ト isomorph ニナルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ

1） L ノ ideal ハスベテ準単純デ，

2） L ノ Sockel ノ derivation ガスベテ L ノ

inner derivation ニ拡張出来ルコトデアル。

§3. Zassenhaus ハ上記論文 80 頁デ次ノ三ツノ Vermutung ヲ述ベテ居リマス。

1) 可換デナイ単純環 L ノ outer derivation algebra D(L)/I(L) ハ可解デアル。

2) スベテノ可換デナイ charakteristisch einfach ナ Ring ハ Charakteristik p ノトキ、einfach ナ algebra ノ p-Potenz ring ニナル.

3) L ヲ可換デナイ、charakteristisch einfach ナ環トスレバ D(L)/I(L) ハ可解デアル。

(実ハ 1) 2) ヨリ 3) ガ出ルコトガ書イテアリマス)

更ニ 2) 3) ヨリ次ノコトヲ結論シテ居リマス。

4) vollkommen ナ準単純環ハ可換デナイ単純環ノ直和ニナル。(P.80, Satz 8)

トコロガ Jacobson ハ Classes of restricted Lie algebras of characteristic p. I (American Journal Vol. LXIII 1941) デ 1) ニ対スル反例ヲ示シテ居リマス。ソウスレバ勿論 3) モ一般ニ成立タヌワケデスガ、コヽデ 4) モ実ハ一般ニ成立タヌコトヲ言ヒマス。

ソノタメニハ 4) ガ正シイトスレバ 1) モ正シイコトヲ証明スレバ十分ナワケデス。4) ガ成立シテ 1) ガ成立シナ

イトスル。ソウスレバ可換デナイ単純環 L ガアッテ、$D(L)/I(L)=K$ ガ *solvable* デナイ。

$$A^0K=K,\ AK=K\circ K,\ A^2K=A(AK)=(K\circ K)\circ(K\circ K)\cdots\cdots$$

$$A^iK=A(A^{i-1}K)=A^{i-1}K\circ A^{i-1}K$$

トオク。（A: *Ableitung*）

$K\supseteq AK\supseteq A^2K\supseteq\cdots\cdots$ デ、K ハ *solvable* デナイカラ、i ガアッテ

$$A^iK=A^{i+1}K=\cdots\cdots\neq 0$$

トナル。

シカルニ $A^iK=A^i(D(L)/I(L))=A^iD(L)+I(L)/I(L)$ デアルカラ

$$N=A^iD(L)+I(L)=A^{i+1}D(L)+I(L)=\cdots\cdots$$

$N\neq I(L)$ デアル。

$$AN=A(A^iD(L)+I(L))\supseteq A^{i+1}D(L)+AI(L)$$

$$=A^{i+1}D(L)+I(L)=N \quad (\because\ AI(L)=I(L))$$

ナル故、$AN=N$ スナハチ N ハ *vollkommen* デアルガ $N\neq I(L)$ ダカラ、定理3ニヨリ準単純デシカモ、単純環ノ直和ニナラナイ。コレハ矛盾デアル。